

Universidade de Brasília
Faculdade de Tecnologia
Departamento de Engenharia Civil e Ambiental
Área de Transportes

ENGENHARIA DE TRÁFEGO

apostila:

TEORIA DO FLUXO DE TRÁFEGO

Prof. Paulo Cesar Marques da Silva
Março de 1994
Revisada em abr/2001 e jul/2007

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO.....	2
2	ABORDAGENS BÁSICAS DA ANÁLISE DE TRÁFEGO.....	2
3	ABORDAGEM MACROSCÓPICA	2
3.1	FLUXO OU VOLUME (Q).....	3
3.2	CONCENTRAÇÃO OU DENSIDADE (K).....	3
3.3	VELOCIDADE.....	4
3.3.1	Velocidade média no tempo.....	5
3.3.2	Velocidade média no espaço.....	5
3.3.3	Relação entre as velocidades médias no tempo e no espaço	6
3.4	RELAÇÃO ENTRE AS VARIÁVEIS MACROSCÓPICAS DO TRÁFEGO	7
3.4.1	Modelos de velocidade-concentração	8
3.4.2	Modelos de fluxo-concentração.....	10
3.4.3	Modelos de fluxo-velocidade.....	12
3.5	MODELO HIDRODINÂMICO DO TRÁFEGO	13
3.6	TEORIA DA ONDA CINEMÁTICA E ONDAS DE CHOQUE.....	16
4	ABORDAGEM MICROSCÓPICA	20
4.1	MODELOS CLÁSSICOS DE PERSEGUIÇÃO.....	20
4.1.1	1o. caso: $L = 0$ e $M = 0$	21
4.1.2	2o. caso: $L = 0$ e $M = 1$	21
4.1.3	3o. caso: $L = 1$ e $M = 2$	22
4.1.4	4o. caso: $L = 0$ e $M = 2$	23
4.2	MODELOS DO TIPO ‘COLLISION AVOIDANCE’	24
4.3	O MODELO DE GIPPS	24
5	ABORDAGEM MESOSCÓPICA	25
6	BIBLIOGRAFIA.....	27

1 INTRODUÇÃO

Esta apostila foi elaborada originalmente como material bibliográfico de apoio à disciplina “Engenharia de Tráfego”, optativa do curso de graduação em Engenharia Civil da UnB (Universidade de Brasília). Críticas e sugestões serão sempre bem-vindas.

A teoria do fluxo de tráfego consiste da aplicação de leis da matemática, da teoria da probabilidade e da física à descrição do comportamento do tráfego veicular rodoviário. Na realidade, não existe **uma** teoria de fluxo de tráfego. Existem, sim, pelo menos três abordagens teóricas para o tema, cuja validade é determinada pelo interesse do estudo que se deseja realizar.

Conforme o enfoque da análise (macro-, micro- ou mesoscópico), são estudados desde as correntes de tráfego vistas como meios indivisíveis até os menores elementos que as compõem (os veículos) vistos individualmente. Esforços recentes vêm sendo feitos em direção a uma desagregação ainda maior, considerando separadamente, por exemplo, veículo e condutor. Tal abordagem, que vem sendo chamada nanoscópica, não é tratada nesta apostila.

2 ABORDAGENS BÁSICAS DA ANÁLISE DE TRÁFEGO

São três as abordagens básicas da análise de tráfego: a macroscópica, que se preocupa em descrever o comportamento das correntes de tráfego, a microscópica, que se interessa pela interação ente dois veículos consecutivos numa corrente de tráfego, e a mesoscópica, cujas unidades analisadas são grupamentos de veículos que se formam nos sistemas viários.

A análise macroscópica das correntes de tráfego ininterrupto permite ao engenheiro projetista uma melhor compreensão das limitações de capacidade dos sistemas viários e a avaliação de conseqüências de ocorrências que provocam pontos de estrangulamento nos mesmos.

A análise microscópica das relações entre pares de veículos de uma mesma corrente de tráfego permite o estudo de fluxos não necessariamente homogêneos ou ininterruptos. O tratamento individualizado dos veículos exige mais recursos computacionais do que a abordagem macroscópica.

A análise mesoscópica dos grupos de veículos nas correntes de tráfego, chamados pelotões, é útil, por exemplo, no estabelecimento de políticas de coordenação semaforica. Para muitos, a análise mesoscópica não existe e seus objetos de estudo estariam enquadrados nas análises macroscópicas. Para outros autores, porém, as formulações teóricas acerca do comportamento dos pelotões de veículos são suficientes para que nesta apostila se faça a distinção aqui proposta.

3 ABORDAGEM MACROSCÓPICA

As análises macroscópicas do tráfego baseiam-se na consideração de que as correntes de tráfego são meios contínuos. Para estudar seu comportamento a abordagem macroscópica lança mão da aplicação das Leis da Hidrodinâmica, motivo pelo qual a abordagem é conhecida também como Analogia Hidrodinâmica do Tráfego.

Por suas características e considerações, as análises macroscópicas aplicam-se com sucesso ao estudo de tráfego com alta densidade, mas não se prestam facilmente às situações de tráfego rarefeito, quando é alta a variação de comportamento entre os condutores. As análises macroscópicas exigem a definição das três grandezas básicas que serão vistas nas seções a seguir. Como as características do tráfego variam no tempo e no espaço, os estudos costumam adotar valores médios, sendo que estas médias podem ser temporais ou espaciais.

3.1 FLUXO OU VOLUME (q)

O fluxo de tráfego, também chamado de volume de tráfego, é representado pela variável q . É uma variável temporal e significa o número de veículos que cruzam uma determinada seção de uma via considerada dentro de um dado intervalo de tempo.

Considere o exemplo da figura 3.1. No trecho de via representado, é determinada a seção SS' que passa pelo ponto P , posicionado no eixo OX a uma distância x da origem O . Durante o intervalo de tempo T são contados os $n(x)$ veículos que cruzam a seção. O fluxo $q(x)$, em veíc./h, é então definido por:

$$q(x) = \frac{n(x)}{T} \quad (3.1)$$

Segundo a analogia hidrodinâmica, o fluxo corresponde à vazão de um fluido dentro de um duto.

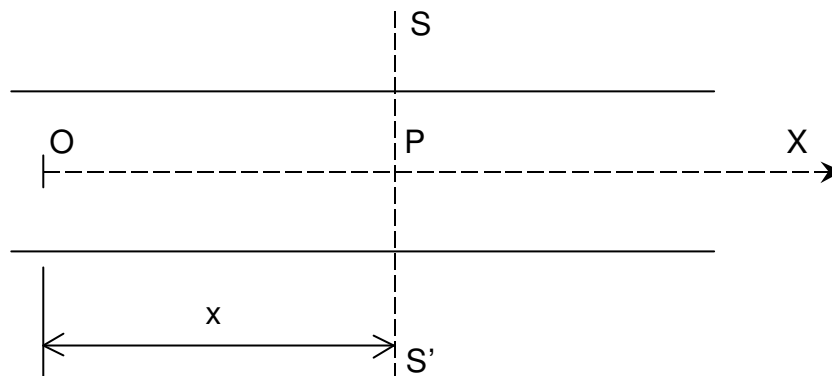


Figura 3.1 Medição de fluxo numa seção de via

3.2 CONCENTRAÇÃO OU DENSIDADE (k)

A concentração, também chamada densidade e representada por k , é uma grandeza espacial, significando o número de veículos presentes numa determinada extensão de via. Considere o trecho de via de comprimento X limitado pelas seções SS' e $S_1S'_1$, representado na figura 3.2. Imagine que num determinado instante t uma fotografia é tirada e nela é possível contar os N

veículos que se encontram naquele trecho de via. A concentração $k(t)$, em veíc./km, é dada pela expressão:

$$k(t) = \frac{N(t)}{X} \quad (3.2)$$

Na analogia hidrodinâmica a concentração corresponde à densidade do fluido. Por isso mesmo, em se tratando de tráfego, a concentração de veículos é também chamada de densidade.

É interessante observar que, pelo que foi visto até aqui, uma grandeza temporal, $q(x)$, é medida no espaço infinitesimal (a seção SS') e uma grandeza espacial, $k(t)$, é medida no tempo infinitesimal (o instante t).

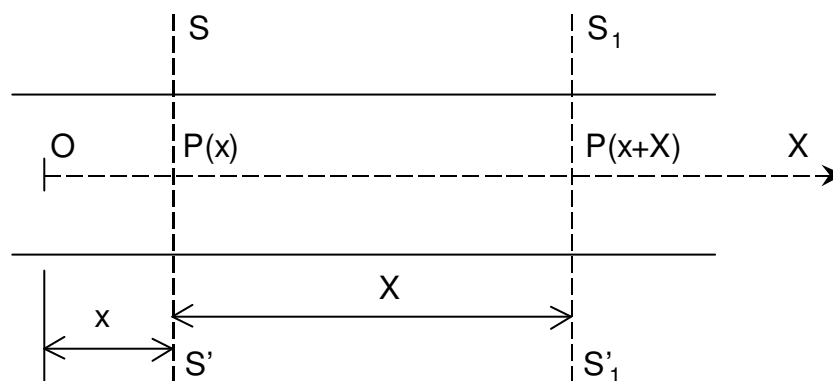


Figura 3.2 Medição de fluxo numa seção de via

3.3 VELOCIDADE

Esta grandeza é definida, como é fácil visualizar, dividindo a expressão do fluxo pela da concentração:

$$v = \frac{q(x)}{k(t)} = \frac{X}{T} \times \frac{n(x)}{N(T)} \quad (3.3)$$

Em regime permanente, ou seja, numa situação em que não há alteração nos valores das variáveis, q e k independem de x e t . Neste caso, a velocidade v , comum a todos os veículos ao longo da via e ao longo do tempo, é simplesmente dada por:

$$v = \frac{q}{k} \quad (3.4)$$

Porém, o regime permanente é uma ocorrência muito rara e na prática o que se observa é que as grandezas variam ao longo do tempo e do espaço. Ao invés do que ocorre com o fluxo, variável temporal, e a concentração, variável espacial, a velocidade é uma variável cuja média pode ser obtida espacial ou temporalmente.

3.3.1 Velocidade média no tempo

Considere a seção de via SS' da figura 3.1. Considere também que foram coletadas nesta seção, via radar, por exemplo, as velocidades instantâneas v_i de n veículos no intervalo de tempo T . A velocidade média dos n veículos neste intervalo de tempo é a média aritmética das velocidades v_i , ou seja:

$$\bar{v}_t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i \quad (3.5)$$

3.3.2 Velocidade média no espaço

Considere o pequeno trecho de via da figura 3.3, onde dx é suficientemente pequeno para que valha a expressão $v=q/k$.

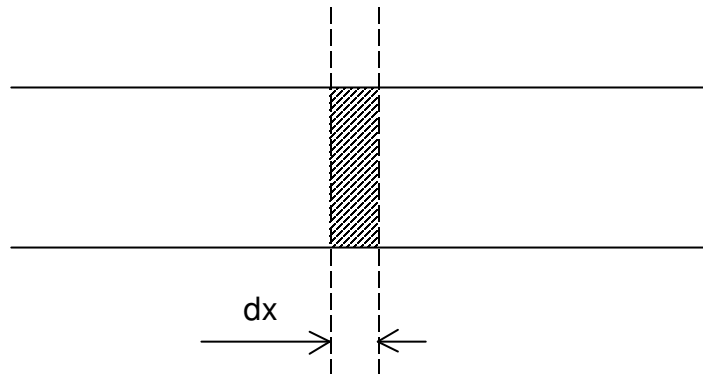


Figura 3.3 Trecho de via

Considere n o número total de veículos que percorre o trecho dx no intervalo de tempo T . O fluxo neste trecho, portanto, será:

$$q = \frac{n}{T} \quad (3.6)$$

A concentração será o valor médio de k ao longo do intervalo de tempo T . Chamando t o intervalo de tempo infinitesimal dentro de T e N o número de veículos presentes em dx em cada instante t , podemos escrever:

$$k = \frac{1}{T} \int_0^T k(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{N(t)}{dx} dt = \frac{1}{T dx} \int_0^T N(t) dt \quad (3.7)$$

Considere agora para $N(t)$ a expressão:

$$N(t) = \sum_{i=1}^n p_i(t) \quad (3.8)$$

onde: $p_i(t)$ é uma função tal que: $p_i(t) = 1$ quando o veículo i acha-se presente em dx e $p_i(t) = 0$ quando o veículo i acha-se ausente de dx .

A expressão da concentração k poderá então ser escrita como:

$$k = \frac{1}{Tdx} \int_0^T p_i(t) dt = \frac{1}{Tdx} \sum_{i=1}^n t_i \quad (3.9)$$

onde: t_i é o tempo de percurso do veículo i ao longo de dx .

Dividindo a expressão (3.6) por (3.9) tem-se:

$$\frac{q}{k} = \frac{Tdx}{1} \frac{n}{T} \frac{1}{\sum_{i=1}^n t_i} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{t_i}{dx}} \quad (3.10)$$

Sendo $v_i = \frac{dx}{t_i}$, chega-se à seguinte expressão para a velocidade média no espaço:

$$\bar{v}_s = \frac{q}{k} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i}} \quad (3.11)$$

Ou seja, a velocidade média no espaço é a média harmônica das velocidades dos veículos observadas em uma seção da via.

3.3.3 Relação entre as velocidades médias no tempo e no espaço

Em qualquer caso, exceto quando as velocidades de todos os veículos sejam iguais e constantes, a velocidade média no espaço é menor que a velocidade média no tempo. Coube a J. G. Wardrop, em artigo publicado em 1952 — “Some Theoretical Aspects of Road Traffic Research”, citado em Huber (1982) —, demonstrar a relação matemática entre as duas grandezas.

Wardrop considerou que uma corrente de tráfego é composta de m sub-correntes subsidiárias i , cada uma delas com um fluxo q_i , velocidade v_i e concentração k_i , e definiu a função f , tal que:

$$f_i = \frac{q_i}{q} \quad (3.12)$$

A velocidade média no tempo, no sentido de Wardrop, é dada, por definição, pela expressão:

$$\bar{v}_t = \frac{\sum_{i=1}^m q_i v_i}{q} = \sum_{i=1}^m f_i v_i \quad (3.13)$$

Analogamente, Wardrop definiu a função f' como:

$$f'_i = \frac{k_i}{k} \quad (3.14)$$

e a velocidade média no espaço como:

$$\bar{v}_s = \frac{\sum_{i=1}^m q_i}{k} = \frac{\sum_{i=1}^m k_i v_i}{k} = \sum_{i=1}^m f'_i v_i \quad (3.15)$$

Substituindo $q_i = k_i v_i$ em (3.13), chega-se a:

$$\bar{v}_t = \sum_{i=1}^m \frac{k_i v_i^2}{q} = k \sum_{i=1}^m \frac{k_i v_i^2}{k q} = k \sum_{i=1}^m \frac{f'_i v_i^2}{q} \quad (3.16)$$

Tendo em vista que $q = k \bar{v}_s$, chega-se a:

$$\begin{aligned} \bar{v}_t &= \frac{k \sum_{i=1}^m f'_i v_i^2}{k \bar{v}_s} = \frac{1}{\bar{v}_s} \sum_{i=1}^m f'_i v_i^2 \\ \bar{v}_t &= \frac{1}{\bar{v}_s} \sum_{i=1}^m f'_i [\bar{v}_s + (v_i - \bar{v}_s)]^2 \\ \bar{v}_t &= \frac{1}{\bar{v}_s} \sum_{i=1}^m f'_i [\bar{v}_s^2 + 2\bar{v}_s(v_i - \bar{v}_s) + (v_i - \bar{v}_s)^2] \\ \bar{v}_t &= \frac{1}{\bar{v}_s} \left[\bar{v}_s^2 \sum_{i=1}^m f'_i + 2\bar{v}_s \sum_{i=1}^m f'_i (v_i - \bar{v}_s) + \sum_{i=1}^m f'_i (v_i - \bar{v}_s)^2 \right] \end{aligned} \quad (3.17)$$

Considerando-se que $\sum_{i=1}^m f'_i = 1$ e $\sum_{i=1}^m (v_i - \bar{v}_s) = 0$, a expressão acima pode ser escrita da seguinte forma:

$$\bar{v}_t = \frac{1}{\bar{v}_s} [\bar{v}_s^2 + \sigma^2] = \bar{v}_s + \frac{\sigma^2}{\bar{v}_s} \quad (3.18)$$

onde: σ^2 é a variância da velocidade média no espaço.

3.4 RELAÇÃO ENTRE AS VARIÁVEIS MACROSCÓPICAS DO TRÁFEGO

Os teóricos que trabalharam modelos de relação entre as variáveis macroscópicas do tráfego determinaram, a partir de experimentos e observações em campo, os seguintes valores:

- v_f é a velocidade de fluxo livre, corresponde à média das velocidades desejadas pelos motoristas dos veículos numa corrente de tráfego;
- k_j é a concentração máxima, correspondente à situação de completo congestionamento (*jam*, em inglês);
- $q_{máx}$ é o máximo fluxo que pode ser atendido por uma via ou trecho de via;

v_0 é a velocidade 'ótima', correspondente ao ponto em que se alcança $q_{máx}$ e k_0 é a concentração 'ótima', correspondente ao ponto em que se alcança $q_{máx}$.

3.4.1 Modelos de velocidade-concentração

3.4.1.1 Modelo linear

Os modelos lineares de velocidade-concentração têm a representação gráfica que aparece na figura 3.4.

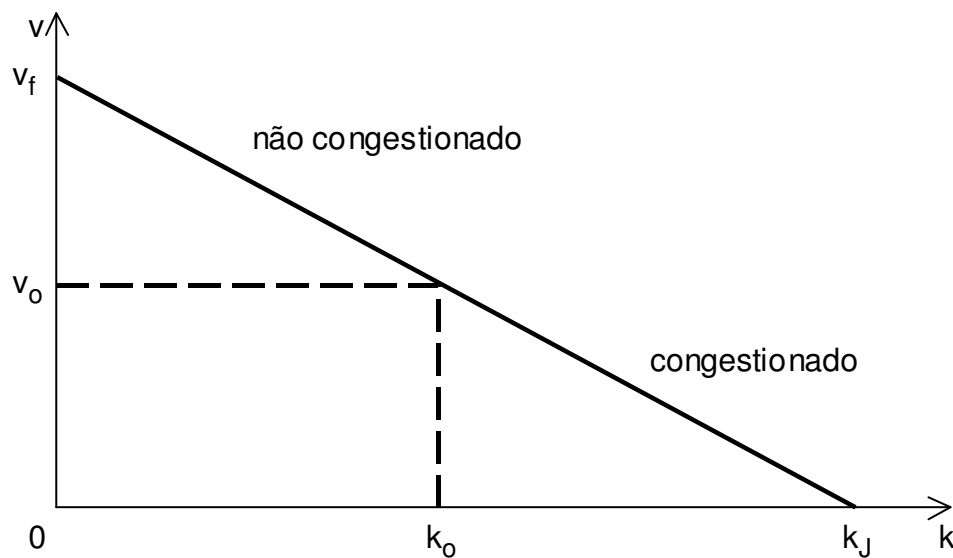


Figura 3.4 Representação gráfica do modelo linear de velocidade-concentração

A primeira proposta de modelo linear de velocidade-concentração foi elaborada por Greenshields em 1935, com a seguinte formulação:

$$v = v_f \left(1 - \frac{k}{k_J} \right) \quad (3.19)$$

Este modelo tem a vantagem da simplicidade, mas observações de campo revelaram que o comportamento linear da curva velocidade-concentração acontece apenas nas faixas intermediárias de v e k , como mostra a figura 3.5.

3.4.1.2 Modelos logarítmicos

Estes modelos tentam superar as limitações do modelo linear para os valores menos intermediários de v e k . Em 1959 Greenberg propôs a seguinte formulação:

$$v = v_0 \ln \left(\frac{k_J}{k} \right) \quad (3.20)$$

O modelo de Greenberg demonstrou boa aderência para fluxos congestionados, mas não é satisfatório para baixas concentrações. Em 1961 Underwood propôs a seguinte expressão:

$$v = v_f e^{-\frac{k}{k_0}} \quad (3.21)$$

Este modelo tem boa aderência para baixas concentrações, mas não para altas. Por exemplo, no limite máximo de concentração, k_J , a equação (3.21) não produz o resultado $v = 0$.

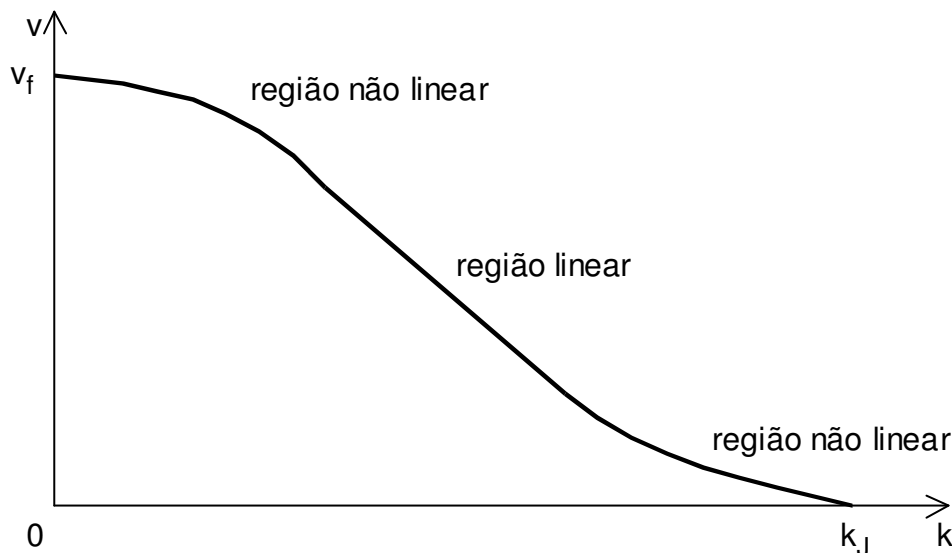


Figura 3.5 Comportamento observado em campo da relação velocidade-concentração

3.4.1.3 Modelos de regime único

Estes são, na realidade, famílias de modelos, propostos com o objetivo de superar as limitações de modelos que representam apenas determinadas regiões da curva de velocidade-concentração. Pipes, em 1967, e Munjal, em 1971, chegaram à seguinte formulação:

$$v = v_f \left(1 - \frac{k}{k_J}\right)^n \quad (3.22)$$

com $n > 1$. Pode-se notar que o modelo de Greenberg seria um caso particular do modelo acima, com $n = 1$. Em 1965 o seguinte modelo foi proposto por Drew:

$$v = v_f \left[1 - \left(\frac{k}{k_J}\right)^{\frac{n+1}{2}}\right] \quad (3.23)$$

com $n > -1$. Outra vez, o modelo de Greenberg figuraria como um caso particular do modelo de Drew, com $n = 1$. Quando $n = 0$, a expressão fica reduzida a:

$$v = v_f \left[1 - \sqrt{\left(\frac{k}{k_J} \right)} \right] \quad (3.24)$$

que é conhecido como modelo parabólico. Por último, Drake, em 1967, propôs a seguinte formulação:

$$v = v_f e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{k}{k_o} \right)^2} \quad (3.25)$$

3.4.1.4 Modelos multi-regime

Em 1961 Edie propôs o uso misto de modelos: para baixa concentração, o modelo de Underwood; para alta concentração, o de Greenberg.

3.4.2 Modelos de fluxo-concentração

A curva sugerida pelos teóricos que primeiro estudaram a relação entre estas variáveis macroscópicas do tráfego está representada na figura 3.6.

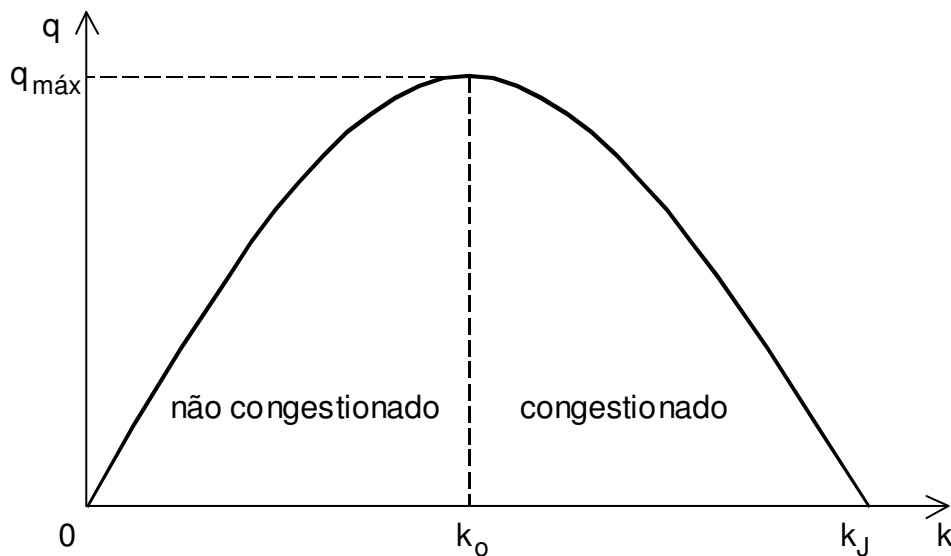


Figura 3.6 Diagrama representando a relação fluxo-concentração

A formulação matemática correspondente é o chamado modelo parabólico, oriundo do modelo de Greenshields para a relação velocidade-concentração:

$$q = vk = v_f \left(k - \frac{k^2}{k_J} \right) \quad (3.26)$$

No ponto correspondente a $q_{máx}$, tem-se $\frac{dq}{dk} = 0$, portanto:

$$\frac{dq}{dk} = v_f \left(1 - 2 \frac{k_o}{k_J} \right) = 0 \Rightarrow k_o = \frac{k_J}{2} \quad (3.27)$$

Conseqüentemente, de Greenshields, chega-se a:

$$v_o = v_f \left(1 - \frac{k_J}{2k_J} \right) = \frac{v_f}{2} \quad (3.28)$$

Observações de campo demonstraram que a curva não era simétrica, estando mais próxima daquela representada na figura 3.7. A partir desta constatação foram desenvolvidos outros modelos, como o logarítmico.

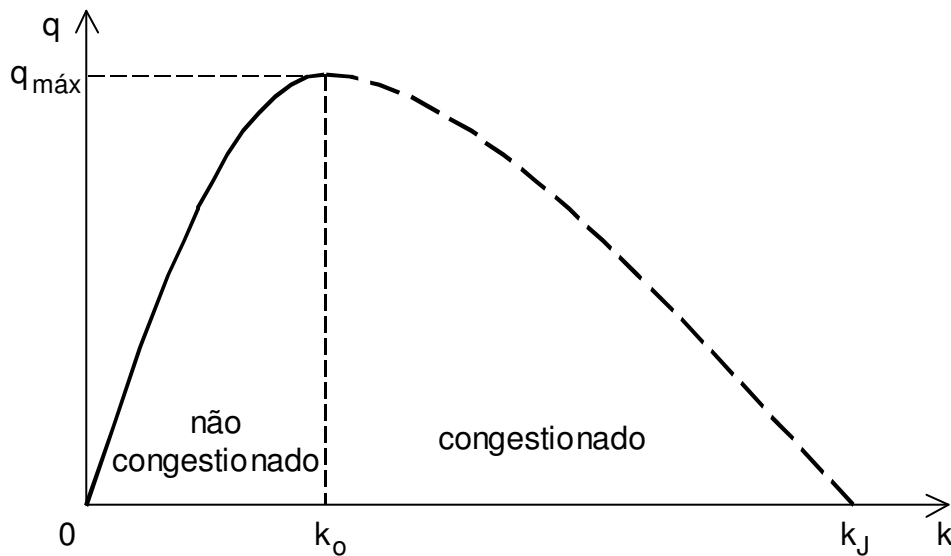


Figura 3.7 Diagrama representando a relação fluxo-concentração observada em campo

Com efeito, os modelos logarítmicos de velocidade-concentração geraram modelos não lineares de fluxo-concentração. O primeiro deles foi desenvolvido a partir do modelo de Greenberg para a relação velocidade-concentração e tem a seguinte formulação:

$$q = kv = kv_o \ln \left(\frac{k_J}{k} \right) \quad (3.29)$$

Para as condições de $q_{máx}$, tem-se:

$$\frac{dq}{dk} = 0 \Rightarrow k_o = \frac{k_J}{e} \text{ e } q_{máx} = v_o \frac{k_J}{e} \quad (3.30)$$

Já do modelo logarítmico de Underwood tem-se:

$$q = kv_f e^{-\frac{k}{k_o}} \quad (3.31)$$

com:

$$v_o = \frac{v_f}{e} \text{ e } q_{\text{máx}} = k_o \frac{v_f}{e} \quad (3.32)$$

3.4.3 Modelos de fluxo-velocidade

Também para esta relação foi proposto o modelo parabólico, derivado do modelo de Greenshields para a relação velocidade-concentração e correspondente ao diagrama da figura 3.8:

$$\begin{aligned} v &= v_f \left(1 - \frac{k}{k_J} \right) \\ v - v_f &= -\frac{k}{k_J} \\ k &= k_J (v_f - v) = k_J \left(1 - \frac{v}{v_f} \right) \end{aligned} \quad (3.33)$$

Substituindo em $q = kv$, tem-se:

$$q = vk_J \left(1 - \frac{v}{v_f} \right) = k_J \left(v - \frac{v^2}{v_f} \right) \quad (3.34)$$

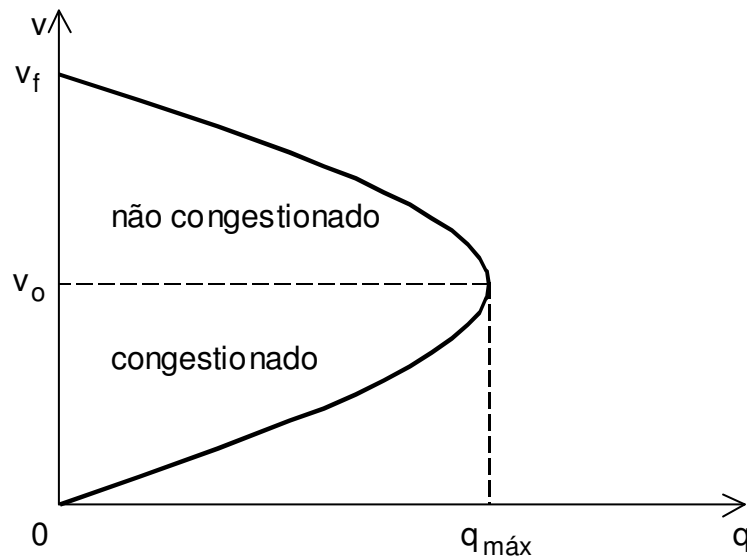


Figura 3.8 Diagrama da relação parabólica entre velocidade e fluxo

3.5 MODELO HIDRODINÂMICO DO TRÁFEGO

Segundo Greenberg — citado por Pereira (1988) —, o tráfego bastante denso e ininterrupto permite a formulação da seguinte equação fundamental, análoga à do escoamento de um fluido em um duto:

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{c^2}{k} \frac{\partial k}{\partial x} \quad (3.35)$$

onde: x é a distância considerada em relação a uma dada origem [m] e
 c é uma constante, chamada de parâmetro da via.

Considerando a velocidade v como função do tempo e do espaço, ou seja, $v = f(x,t)$, tem-se, para o diferencial total de v :

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial t} dt \quad (3.36)$$

Dividindo-se ambos os lados por dt , tem-se:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dx}{dt} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} \quad (3.37)$$

Como $\frac{dx}{dt} = v$, chega-se a:

$$\frac{dv}{dt} = v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.38)$$

Substituindo-se esta expressão na equação fundamental (3.35), obtém-se:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{c^2}{k} \frac{\partial k}{\partial x} = 0 \quad (3.39)$$

Como se está considerando a corrente de veículos como um fluido contínuo, o ‘fluido de veículos’ nestas condições satisfaz também à equação de continuidade dos fluidos contínuos:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (3.40)$$

Admitindo-se a velocidade v variando em função da concentração k , e conseqüentemente a validade de $q = k v(k)$, obtém-se:

$$\frac{\partial k}{\partial x} = v \frac{\partial k}{\partial x} + k \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.41)$$

Substituindo esta expressão na equação da continuidade (3.40), tem-se:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + v \frac{\partial k}{\partial x} + k \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (3.42)$$

Por outro lado, aplicando-se a definição de derivada total em função do quociente de duas derivadas parciais, pode-se escrever:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{dv}{dk} \frac{\partial k}{\partial t} \quad (3.43)$$

e:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{dv}{dk} \frac{\partial k}{\partial x} \quad (3.44)$$

Substituindo estas expressões de $\frac{\partial v}{\partial t}$ e $\frac{\partial v}{\partial x}$ na equação (3.39) tem-se:

$$\frac{dv}{dk} \frac{\partial k}{\partial t} + v \frac{dv}{dk} \frac{\partial k}{\partial x} + \frac{c^2}{k} \frac{\partial k}{\partial x} = 0 \quad (3.45)$$

Fazendo $\frac{dv}{dk} = v'$ pode-se escrever:

$$v' \frac{\partial k}{\partial t} + v v' \frac{\partial k}{\partial x} + \frac{c^2}{k} \frac{\partial k}{\partial x} = 0 \quad (3.46)$$

ou:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \left(v + \frac{c^2}{kv'} \right) \frac{\partial k}{\partial x} = 0 \quad (3.47)$$

Substituindo (3.44) na equação (3.42) chega-se a:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + v \frac{\partial k}{\partial x} + k \frac{dv}{dk} \frac{\partial k}{\partial x} = 0 \quad (3.48)$$

Como $\frac{dv}{dk} = v'$ tem-se:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + (v + kv') \frac{\partial k}{\partial x} = 0 \quad (3.49)$$

Pode-se construir então o sistema das equações (3.43) e (3.44) que, para não admitir uma solução trivial, deve Ter o determinante dos coeficientes não nulo, ou seja:

$$\begin{vmatrix} 1 & \left(v + \frac{c^2}{kv'} \right) \\ 1 & (v + kv') \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (v + kv') - \left(v + \frac{c^2}{kv'} \right) = 0 \quad (3.50)$$

Então:

$$kv' - \frac{c^2}{kv'} = 0 \rightarrow kv' = \frac{c^2}{kv'} \rightarrow (v')^2 = \frac{c^2}{k^2} \quad (3.51)$$

Portanto:

$$\left(\frac{dv}{dk}\right)^2 = \frac{c^2}{k^2} \rightarrow \frac{dv}{dk} = \pm \sqrt{\frac{c^2}{k^2}} = \pm \frac{c}{k} \quad (3.52)$$

Como a relação entre v e k é inversa, será adotado o valor negativo da expressão acima. Assim:

$$dv = -c \frac{dk}{k} \quad (3.53)$$

Integrando esta expressão chega-se a:

$$v = -c \int \frac{1}{k} dk = -c(\ln k + X) \quad (3.54)$$

Para $v = 0$, $k = k_J$, logo:

$$-c(\ln k_J + X) = 0 \quad (3.55)$$

Como $c \neq 0$ conclui-se que:

$$\ln k_J + X = 0 \rightarrow X = -\ln k_J \quad (3.56)$$

Substituindo-se este valor de X em (3.54) tem-se:

$$\begin{aligned} v &= -c(\ln k - \ln k_J) \\ v &= c(\ln k_J - \ln k) \\ v &= c \ln \frac{k_J}{k} \end{aligned} \quad (3.57)$$

Esta é a expressão da velocidade média do tráfego ininterrupto de alta concentração em regime permanente, do ponto de vista macroscópico. Sabendo que $q = kv$ e substituindo v por sua expressão dada por (3.57), chega-se a:

$$q = ck \ln \frac{k_J}{k} \quad (3.58)$$

Esta expressão é conhecida como a **equação geral do tráfego** em regime permanente, do ponto de vista macroscópico. A ela corresponde o chamado **diagrama fundamental do tráfego** (também do ponto de vista macroscópico e em regime permanente), que aparece na figura 3.9. O diagrama fundamental do tráfego tem as seguintes características:

- a curva passa pela origem;
- a curva passa por um ponto J , de concentração k_J , que corresponde a $q = 0$;

- a curva tem um ponto de máximo **A** em que $k = k_o = \frac{k_J}{e}$, que corresponde a $q = q_{\text{máx}}$;
- num ponto P_i qualquer da curva, a tangente do ângulo α_i é dada por $\text{tg}\alpha_i = \frac{q_i}{k_i} = v_i$, ou seja, pela velocidade média no espaço da corrente de tráfego v
- no ponto **A**, $v = c$, ou seja, o parâmetro de via c corresponde ao valor da velocidade de fluxo máximo v_o .

Pereira (1988) relata sumariamente a experiência realizada por Greenberg no Lincoln Tunnel (Nova Iorque, EUA), onde foram medidos os valores de fluxo, concentração e velocidade média espacial. A análise de regressão efetuada com os dados levantados levou às seguintes formulações:

$$v = 17,2 \times \ln\left(\frac{227}{k}\right) \quad \text{e} \quad q = 17,2 \times k \ln \frac{227}{k} \quad (3.59)$$

Assim, verificadas as condições de tráfego de alta densidade e de regime permanente presentes no local do experimento e considerando as unidades utilizadas nos Estados Unidos, Greenberg conclui que os valores de 227 veíc./mi (142 veíc./km) para a concentração e de 17,2 mph (27,5 km/h) para a velocidade média no espaço são os que permitem o máximo valor de fluxo.

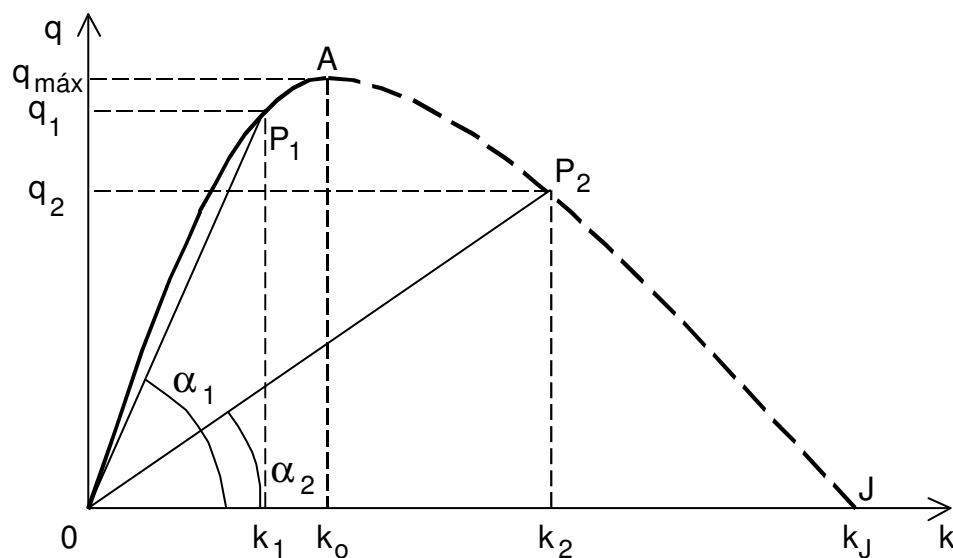


Figura 3.9 Diagrama Fundamental do Tráfego

3.6 TEORIA DA ONDA CINEMÁTICA E ONDAS DE CHOQUE

Lighthill e Whitham (1955) foram os primeiros a aplicar a Teoria da Onda Cinemática aos fenômenos de tráfego. Eles denominaram de **onda cinemática** a propagação de pequenas perturbações na concentração k ao longo da via de tráfego. Considere, por exemplo, a situação representada na figura 3.10. No ponto x_1 há uma ocorrência qualquer que provoca um pequeno

estrangulamento na artéria. Na região **A**, a montante do ponto de estrangulamento, verifica-se um valor k_1 de concentração maior que o valor k_2 , registrado na região **B**, a jusante do ponto de estrangulamento. De acordo com os autores, as regiões **A** e **B** geram ondas cinemáticas no momento da perturbação que se propagam no sentido do movimento, a onda gerada na região **A** se propagando com velocidade menor que a onda gerada na região **B**.

Lighthill e Whitham começaram a modelagem matemática do fenômeno substituindo a expressão:

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial x} \quad (3.60)$$

na mesma equação de continuidade (3.40) usada por Greenberg no estudo da analogia hidrodinâmica, chegando a:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial x} = 0 \quad (3.61)$$

Fazendo $\frac{\partial q}{\partial k} = u_w$, tem-se:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + u_w \frac{\partial k}{\partial x} = 0 \quad (3.62)$$

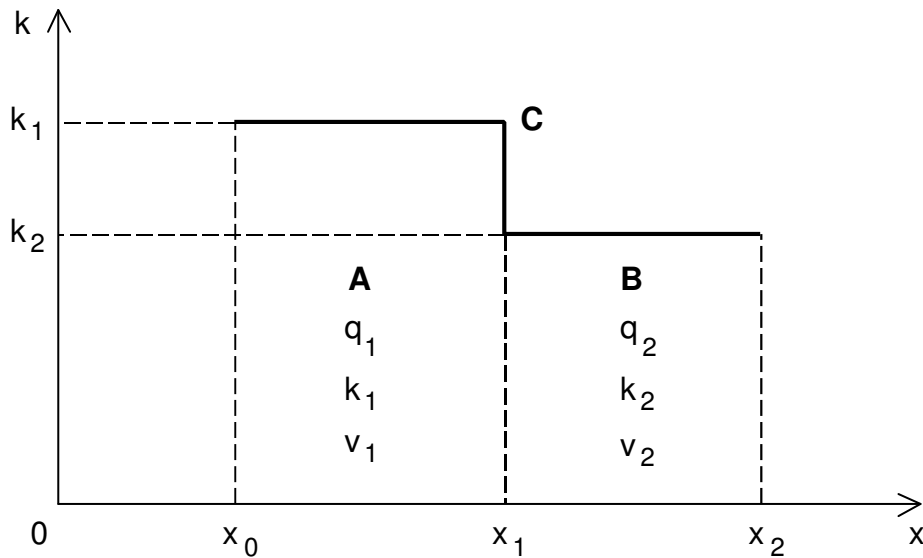


Figura 3.10 Representação das mudanças nas características de tráfego causadas por uma perturbação

Lighthill e Whitham chamaram a expressão (3.62) de **equação da onda cinemática**, sendo $\frac{\partial q}{\partial k} = u_w$ a grandeza de sua velocidade de propagação. Ainda segundo eles, as ondas de choque são o resultado do encontro das duas ondas cinemáticas geradas nas regiões **A** e **B** da figura 3.10.

Para calcular o valor da velocidade da onda de choque U_w , considere que ela se forma no instante t na seção x_1 da figura 3.10. Denomine de C o septo que caracteriza o limite entre as regiões A e B (o deslocamento da onda de choque implica, naturalmente, no deslocamento do septo C). Considere ainda que:

v_1 é a velocidade média no espaço dos veículos na região A ;

v_2 é a velocidade média no espaço dos veículos na região B ;

U_{r1} é a velocidade dos veículos na região A relativamente ao deslocamento do septo C e

U_{r2} é a velocidade dos veículos na região B relativamente ao deslocamento do septo C

Em termos finitos, a equação de continuidade aplicada ao entorno do septo C pode ser escrita:

$$N = k_1 U_{r1} t = k_2 U_{r2} t \quad (3.63)$$

onde: N é o número total de veículos atravessando o septo C e

t é o tempo correspondente à passagem dos N veículos da região A para a região B .

Desta expressão pode-se concluir que:

$$k_1 U_{r1} = k_2 U_{r2} \Rightarrow k_1 (v_1 - U_w) = k_2 (v_2 - U_w) \quad (3.64)$$

Portanto:

$$k_1 v_1 - k_2 v_2 = U_w (k_1 - k_2) \quad (3.65)$$

ou:

$$U_w = \frac{k_1 v_1 - k_2 v_2}{k_1 - k_2} \quad (3.66)$$

Lembrando que $kv = q$, virá:

$$U_w = \frac{q_1 - q_2}{k_1 - k_2} \quad (3.67)$$

Isto significa que o valor de U_w corresponde à inclinação da reta que passa pelos pontos P_1 (que tem os valores q_1 e k_1 da região A da figura 3.11) e P_2 (que tem os valores q_2 e k_2 da região B da figura 3.11)

Considere agora que a perturbação observada numa seção de via em que se origina a onda de choque seja de pequena intensidade. Ou seja:

$$q_1 - q_2 = \Delta q \quad \text{e} \quad k_1 - k_2 = \Delta k \quad (3.68)$$

Portanto:

$$U_w = \frac{\Delta q}{\Delta k} \quad (3.69)$$

No limite, quando $\Delta k \rightarrow 0$, ter-se-á:

$$\lim_{\Delta k \rightarrow 0} U_w = \lim_{\Delta k \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta k} = \frac{dq}{dk} = u \quad (3.70)$$

Esta expressão representa a grandeza da onda de choque para pequenas perturbações. Por outro lado, sabe-se que $q = kv$, logo:

$$\frac{\Delta q}{\Delta k} = v \frac{\Delta k}{\Delta k} + k \frac{\Delta v}{\Delta k} = v + k \frac{\Delta v}{\Delta k} \Rightarrow u_w = v + k \frac{\Delta v}{\Delta k} \quad (3.71)$$

Esta expressão reproduz o valor da onda cinemática de Lighthill e Whitham. Como a velocidade média no espaço v decresce com o aumento da concentração k , conclui-se que $\frac{\Delta v}{\Delta k} < 0$. Portanto $u_w < v$, ou seja, a velocidade de propagação da onda cinemática é menor que a velocidade média espacial dos veículos.

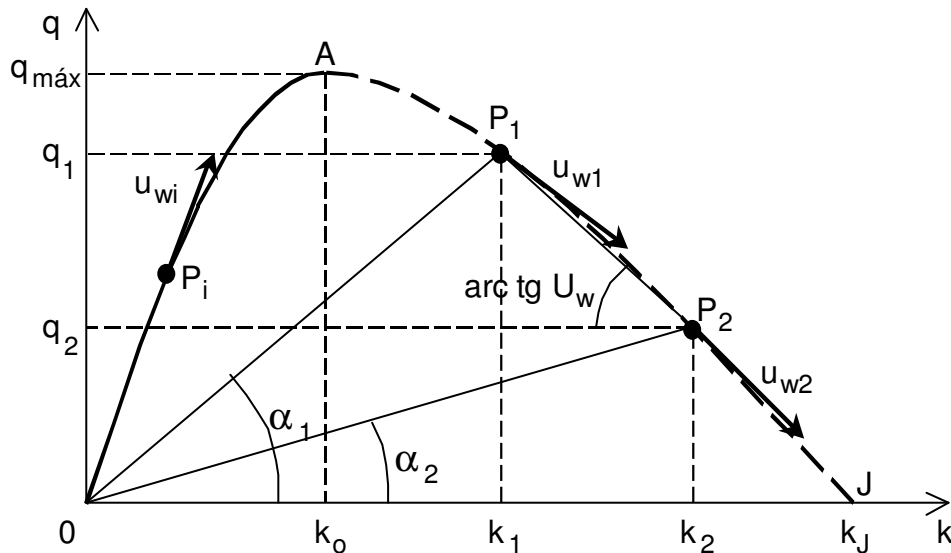


Figura 3.11 Representação da onda cinemática no Diagrama Fundamental do Tráfego

A figura 3.11 mostra a representação da onda cinemática u_w através de um vetor tangente à curva $q(k)$ do diagrama fundamental do tráfego. Considerando a variação do fluxo q em relação à concentração k , pode-se observar que:

- para pequenos valores de k a velocidade da onda cinemática u_w é positiva e a propagação acontece no sentido da corrente de tráfego;
- para grandes concentrações a velocidade u_w é negativa, ou seja, a propagação da onda cinemática ocorre em sentido contrário ao da corrente de tráfego;
- para valores de k próximos de k_0 , ou seja, próximos à condição de fluxo máximo ($q_{máx}$), a velocidade de propagação da onda cinemática u_w aproxima-se da velocidade média no espaço da corrente de tráfego v ; diz-se então que o movimento da onda cinemática é *estacionário* em relação à via; e
- Quando o fluxo é crescente com a concentração (região de não congestionamento em que $0 \geq k \geq k_0$), ou seja, para pequenas densidades, a velocidade da onda cinemática u_w é

menor do que a velocidade média no espaço v , embora sua propagação tenha o mesmo sentido da corrente de tráfego.

4 ABORDAGEM MICROSCÓPICA

A análise microscópica do tráfego foi desenvolvida através dos chamados ‘modelos de perseguição’ ou ‘leis de seqüência’ (*car following*), que procuram descrever o comportamento do elemento *motorista-veículo* como resposta a um estímulo recebido.

4.1 MODELOS CLÁSSICOS DE PERSEGUIÇÃO

Os modelos clássicos de perseguição, desenvolvidos a partir de uma série de experimentos realizados pela General Motors em fins dos anos 1950s (Herman, 1961), buscam traduzir a variação de velocidade de um veículo (chamado *seguidor*) como resposta ao estímulo representado pela velocidade relativa entre ele e o veículo que se desloca a sua frente numa corrente de tráfego (chamado *líder*).

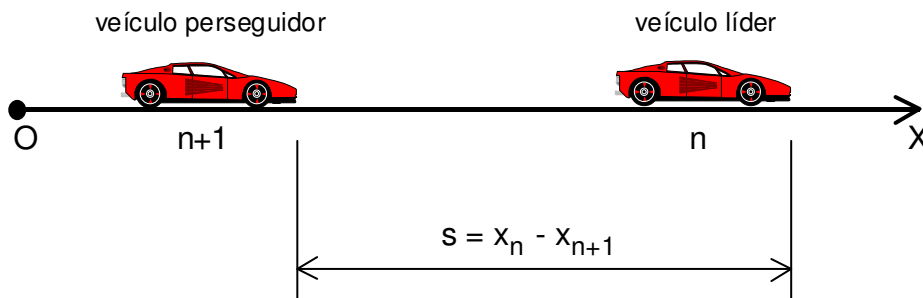


Figura 4.1 Representação da onda cinemática no Diagrama Fundamental do Tráfego

Sejam, por exemplo, dois veículos consecutivos se deslocando numa mesma faixa de tráfego de uma via como os mostrados na figura 4.1. Considerando como referência o eixo OX , num determinado instante t o veículo líder n estará na posição x_n e o seguidor estará na posição x_{n+1} , distante s do líder. Os modelos clássicos de perseguição dizem que a variação de velocidade do veículo seguidor no instante $(t+T)$, expressa por:

$$\ddot{x}_{n+1}(t+T) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

é função de sua velocidade em relação à do veículo líder no instante t , expressa por:

$$\dot{x}_n - \dot{x}_{n+1} = \frac{dx_n}{dt} - \frac{dx_{n+1}}{dt}$$

A fórmula básica destes modelos é a seguinte:

$$\ddot{x}_{n+1}(t+T) = \alpha [\dot{x}_n(t) - \dot{x}_{n+1}(t)] \quad (4.1)$$

onde α é uma função do espaçamento entre os dois veículos no instante t e da velocidade do seguidor no instante $(t+T)$, dada pela expressão:

$$\alpha = c \frac{[\dot{x}_{n+1}(t+T)]^L}{[x_n(t) - x_{n+1}(t)]^M} \quad (4.2)$$

onde L e M são expoentes cujos valores podem variar conforme o caso estudado, como será visto a seguir.

4.1.1 1o. caso: $L = 0$ e $M = 0$

Este caso se aplica às situações de grande densidade em que $T \rightarrow 0$, isto é, quando se quer estudar as reações que ocorrem em intervalos muito curtos. Se $L = 0$ e $M = 0$, então $\alpha = c$, ou seja:

$$\ddot{x}_{n+1}(t+T) = c [\dot{x}_n(t) - \dot{x}_{n+1}(t)] \quad (4.3)$$

Considerando que o inverso da concentração k é o espaçamento entre veículos, pode-se escrever:

$$x_n - x_{n+1} = \frac{1}{k_{n+1}} \quad (4.4)$$

Derivando esta expressão em relação a t , tem-se:

$$\dot{x}_n - \dot{x}_{n+1} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{k_{n+1}} \right) = -\frac{1}{k_{n+1}^2} \frac{dk_{n+1}}{dt} \quad (4.5)$$

4.1.2 2o. caso: $L = 0$ e $M = 1$

Aqui também a aplicação é válida para grande densidade, com $T \rightarrow 0$. Para estes valores de L e M tem-se:

$$\alpha = \frac{c}{[x_n(t) - x_{n+1}(t)]} \quad (4.6)$$

Portanto:

$$\ddot{x}_{n+1}(t+T) = c \frac{[\dot{x}_n(t) - \dot{x}_{n+1}(t)]}{[x_n(t) - x_{n+1}(t)]} \quad (4.7)$$

Substituindo (4.4) e (4.5) em (4.7) tem-se:

$$\ddot{x}_{n+1}(t + T) = -ck_{n+1} \frac{1}{k_{n+1}^2} \frac{dk_{n+1}}{dt} = -\frac{c}{k_{n+1}} \frac{dk_{n+1}}{dt} \quad (4.8)$$

ou:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{c}{k} \frac{dk}{dt} \rightarrow dv = -\frac{c}{k} dk \quad (4.9)$$

Integrando (4.9) chega-se a:

$$v = -c \int \frac{dk}{k} = -c \ln k + A \quad (4.10)$$

Sabendo que, quando $k = k_J$, $v = 0$ e substituindo estes valores em (4.10) tem-se:

$$0 = -c \ln k + A \Rightarrow A = c \ln k_J \quad (4.11)$$

Substituindo (4.11) em (4.10) tem-se:

$$v = -c \ln k + c \ln k_J = c(\ln k_J - \ln k) = c \ln \left(\frac{k_J}{k} \right) \quad (4.12)$$

Fazendo-se $k = \frac{1}{s}$ e $k_J = \frac{1}{s_J}$, chega-se a:

$$v = c \ln \left(\frac{s}{s_J} \right) \quad (4.13)$$

No estado permanente, com $q = kv$, pode-se escrever:

$$q = kc \ln \left(\frac{k_J}{k} \right) \quad (4.14)$$

Pode-se notar que esta expressão é a equação geral do tráfego (3.58), com $c = v_0$, segundo o modelo hidrodinâmico do tráfego.

4.1.3 3o. caso: $L = 1$ e $M = 2$

Com estes valores, constata-se que, neste caso:

$$\alpha = c \frac{\dot{x}_{n+1}(t + T)}{[x_n(t) - x_{n+1}(t)]^2} \quad (4.15)$$

Ou, considerando as aproximações já adotadas nos casos anteriores:

$$\alpha = c \frac{v_{n+1}}{[x_n - x_{n+1}]^2} \quad (4.16)$$

A expressão diferencial da lei de seqüência, neste caso, será:

$$\frac{dv_{n+1}}{dt} = c \frac{v_{n+1}}{[x_n - x_{n+1}]^2} - (v_n - v_{n+1}) \quad (4.17)$$

Considerando (4.4) e (4.5) pode-se escrever:

$$\frac{dv_{n+1}}{dt} = -cv_{n+1}k_{n+1}^2 \frac{1}{k_{n+1}^2} \frac{dk_{n+1}}{dt} = -cv_{n+1} \frac{dk_{n+1}}{dt} \quad (4.18)$$

Ou ainda:

$$\frac{dv}{dt} = -cv \frac{dk}{dt} \rightarrow dv = -cvdk \rightarrow \frac{dv}{v} = -cdk \quad (4.19)$$

Integrando esta expressão chega-se a:

$$\ln v = -ck + A \quad (4.20)$$

Sabendo que $v = v_f$ quando $k = 0$, ter-se-á:

$$\ln v_f = A \quad (4.21)$$

Substituindo (4.21) em (4.20) tem-se:

$$\ln v = -ck + \ln v_f \rightarrow \ln \frac{v}{v_f} = -ck \Rightarrow \frac{v}{v_f} = e^{-ck} \rightarrow v = v_f e^{-ck} \quad (4.22)$$

Como $q = kv$, a expressão do fluxo será:

$$q = kv_f e^{-ck} \quad (4.23)$$

Nesta expressão, por condição de homogeneidade, c representa o espaçamento.

4.1.4 4o. caso: $L = 0$ e $M = 2$

Neste caso $a = \frac{c}{s^2}$, portanto:

$$\frac{dv_{n+1}}{dt} = \frac{c}{[x_n(t) - x_{n+1}(t)]^2} (v_n - v_{n+1}) \quad (4.24)$$

Substituindo (4.4) e (4.5) em (4.24) e simplificando a expressão assim obtida, tem-se:

$$\frac{dv_{n+1}}{dt} = -c \frac{dk_{n+1}}{dt} \quad \text{ou} \quad \frac{dv}{dt} = -c \frac{dk}{dt} \rightarrow dv = -cdk \Rightarrow v = \int dv = -ck + A \quad (4.25)$$

Como $\mathbf{v} = \mathbf{v}_f$ para $\mathbf{k} = \mathbf{0}$, ter-se-á $\mathbf{A} = \mathbf{v}_f$, logo:

$$\mathbf{v} = -\mathbf{ck} + \mathbf{v}_f \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{v}_f - \mathbf{ck} \quad (4.26)$$

Sendo o fluxo $\mathbf{q} = \mathbf{k}\mathbf{v}$, a expressão do fluxo neste caso será:

$$\mathbf{q} = \mathbf{k}(\mathbf{v}_f - \mathbf{ck}) \quad (4.27)$$

4.2 MODELOS DO TIPO ‘COLLISION AVOIDANCE’

A ‘collision avoidance’ difere da abordagem clássica porque a ênfase deixa de ser na reação do seguidor ao comportamento do líder. Na ‘collision avoidance’ a ênfase está na restrição de que o seguidor deve manter uma distância de segurança em relação ao líder.

A mais conhecida aplicação desta abordagem é a do modelo de simulação de tráfego CARSIM (Benekohal e Treiterer, 1988), que foi desenvolvido para estudar o comportamento dos veículos numa via de tráfego expresso congestionada. O fenómeno predominante neste caso não é caracterizado pela fluidez, mas pelo regime intermitente (o chamado “anda-pára”).

Modelos de tráfego desenvolvidos posteriormente usaram a mesma abordagem para representar o tráfego em redes semaforizadas, considerando que o fenómeno da intermitência tem essencialmente as mesmas características nos dois casos.

4.3 O MODELO DE GIPPS

O pesquisador australiano Gipps (1981) desenvolveu uma formulação multi-regime para a lei de seqüência, que combina aspectos das duas abordagens anteriores. As equações do modelo de Gipps para a velocidade do seguidor são:

$$v_n(t + \tau) = v_n(t) + 2.5a_n\tau \left(1 - \frac{v_n(t)}{V_n}\right) \sqrt{0.025 + \frac{v_n(t)}{V_n}} \quad (4.28)$$

e

$$v_n(t + \tau) = b_n\tau + \sqrt{b_n^2\tau^2 + b_n\{2[x_{n-1}(t) - s_{n-1} - x_n(t)] - v_n(t)\tau - \frac{v_{n-1}(t)^2}{b}\}} \quad (4.29)$$

onde: a_n é a aceleração máxima que o motorista do veículo n deseja usar,

b_n é a taxa máxima de frenagem que o motorista do veículo n deseja usar,

s_n é o comprimento efetivo do veículo n (incluindo o afastamento guardado pelo seu seguidor quando ambos estão parados),

V_n é a velocidade com que o motorista do veículo n deseja se deslocar,

$x_n(t)$ é a posição do veículo n no instante t ,

τ é o tempo de reação, assumido como constante para todos os veículos e

\hat{b} é uma estimativa da frenagem mais intensa b_{n-1} que o motorista do veículo ($n-1$) deseja usar; esta estimativa é necessária porque em condições reais de tráfego o motorista do veículo n não consegue estimar b_{n-1} por observação direta.

Resumidamente, o modelo de Gipps assume que a velocidade do seguidor é dada pelo menor entre os valores produzidos pelas equações (4.28) e (4.29). Quando a equação (4.28) produz o valor mínimo, as condições de tráfego favorecem o fluxo livre e a velocidade do seguidor é ajustada para que este alcance a velocidade desejada por seu motorista. Quando a equação (4.29) produz o valor mínimo, a velocidade do seguidor é ajustada para que seja mantida uma distância de segurança em relação a seu líder de modo a evitar uma colisão no caso deste último frear bruscamente.

5 ABORDAGEM MESOSCÓPICA

Assim como a abordagem microscópica, a análise mesoscópica afasta-se da analogia com as leis da Hidrodinâmica para buscar um tratamento particularizado, mas encara como elementos constituintes das correntes de tráfego não os veículos individualmente, mas os pelotões que eles formam ao se deslocarem no sistema viário, basicamente em função da intermitência provocada pela operação semafórica (Silva, 1992).

O fenômeno da formação e dispersão dos pelotões pode ser visualizado na representação que aparece na figura 5.1. Nela aparecem as taxas de fluxo que ocorrem em pequenos intervalos de tempo na seção **A**, controlada por semáforo, e nas seções **B**, **C** e **D**, espaçadas entre si de distâncias regulares ao longo de uma via hipotética.

Como se pode observar, as diferentes velocidades dos veículos que compõem o pelotão formado na seção **A** da figura 5.1 determinam sua deformação no espaço e no tempo, com uma clara tendência à dispersão. Tal tendência significa que, a partir de uma certa distância da seção em que se formam, sucessivos pelotões fundem-se, ocasionando taxas de fluxo constantes.

O primeiro estudo sobre a dispersão de pelotões de veículos coube ao pesquisador Robertson (1969), que para tal realizou um extensivo levantamento de dados na área urbana de Manchester (Inglaterra), como relata Moreira (1985). A formulação matemática desenvolvida por Robertson foi incorporada ao modelo computacional de simulação TRANSYT (TRAffic Network StudY Tool), destinado a simular o comportamento do tráfego numa rede semaforizada e otimizar os planos semafóricos que a operam.

No TRANSYT o ciclo semafórico é dividido em unidades de tempo iguais, chamadas de passos, e todos os cálculos do programa são efetuados com base nos valores médios de fluxo e fila de veículos, presumíveis de ocorrerem em cada um desses passos. A simulação do comportamento do tráfego em cada trecho de via unidirecional é baseada em três tipos de padrão:

- O padrão de chegada (padrão IN) representa o fluxo que chegaria à linha de parada no final do trecho se os veículos não ficassem retidos nas filas formadas pelo semáforo que controla seu escoamento;
- O padrão de saída (padrão OUT) representa o fluxo de escoamento do tráfego no trecho de via e
- O padrão de saturação (padrão GO) representa o fluxo de escoamento que ocorreria se, durante o tempo de verde, o tráfego saísse do trecho de via na capacidade máxima (fluxo de saturação)

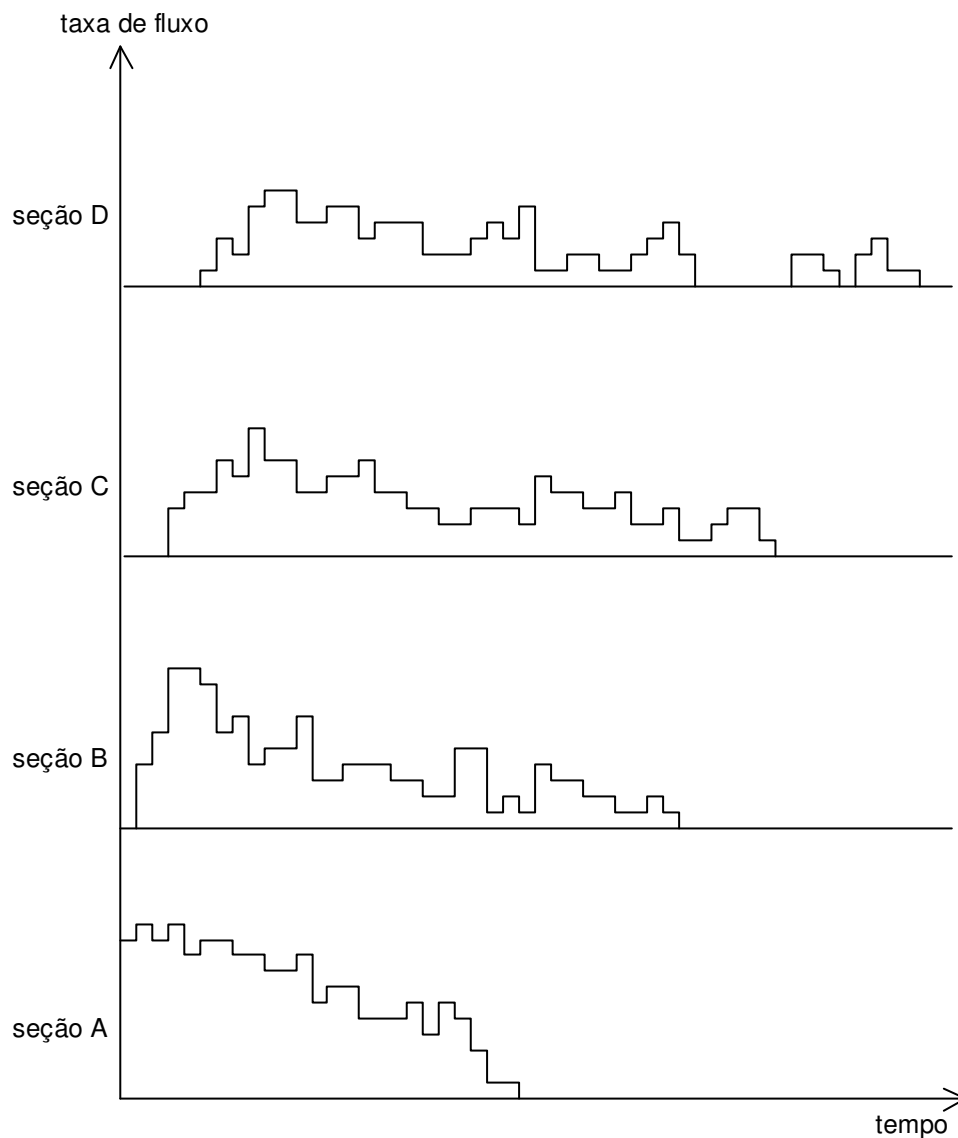


Figura 5.1 Representação da formação e dispersão de pelotões de veículos ao longo de uma via

O modelo matemático da dispersão desenvolvido por Robertson estima, para cada passo da simulação, a taxa de fluxo numa determinada aproximação, segundo a expressão:

$$q_{(k+t)}^1 = F \times q_k \times p + (1 - F) \times q_{(k+t-1)}^1 \quad (5.1)$$

- onde: q_k^1 é o fluxo no passo k do padrão IN na aproximação considerada;
 q_k é o fluxo no passo k do padrão OUT na aproximação a montante que alimenta o trecho de via considerado;
 p é a proporção do padrão OUT da aproximação a montante que o trecho de via considerado;
 t é 0,8 vezes o tempo médio de percurso (medido em passos) da distância para a qual a dispersão está sendo calculada, assumido como o tempo mínimo de percurso e

F é um fator de alisamento, definido por:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{1 + \frac{\mathbf{K}}{100} t} \quad (5.2)$$

onde: **F** é um coeficiente que varia entre 1 e 100 e modifica o fator de dispersão; **K** é um dado de entrada do TRANSYT e tem um valor sugerido de 35.

O modelo de Robertson é, ainda hoje, o ponto de partida para todos os estudos que se enquadram na abordagem mesoscópica do tráfego.

6 BIBLIOGRAFIA

- AASHTO. A Policy on Geometric Design of Highways and Streets. American Association of State Highway and Transportation Officials. Washington DC, EUA, 1990.
- BENEKOHAL, R.F. e J. TREITERER. CARSIM: car-following model for simulation of traffic in normal and stop-and-go conditions. Transportation Research Record, **1194**, pp. 99-111, 1988.
- EDIE, L. C. Car-following and Steady-state Theory for Non-congested Traffic. Operations Research, **9**(1), pp. 66-76. 1961.
- GIPPS, P. G. A Behavioural Car-following Model for Computer Simulation. Transportation Research, **15B**(2), pp. 105-111. 1981.
- HERMAN, R. Theory of Traffic Flow. Proceedings, Symposium on the Theory of Traffic Flow (1959 : Warren, Michigan, EUA). Elsevier. Amsterdam, Holanda, 1961.
- HUBER, M. J. Traffic Flow Theory. In Transportation and Traffic Engineering Handbook. 2a. edição. Institute of Transportation Engineers. Prentice-Hall. Englewood Cliffs, EUA, 1982.
- LIGHTHILL, M. J. e G. B. WHITHAM. On Kinematic Waves II: Theory of Traffic Flow on Long Crowded Roads. Proceedings of the Royal Society, **A229**, pp. 317-345. 1955.
- MOREIRA, M. E. P. Teoria da Dispersão de Fluxos de Tráfego: Análise e Contribuição. Tese de Mestrado da COPPE/UFRJ. Rio de Janeiro, Brasil, 1985.
- PEREIRA, A. L. Teoria de Fluxo de Tráfego. Notas de aula. Curso de Teoria do Fluxo de Tráfego. Programa de Engenharia de Transportes – COPPE/UFRJ. Rio de Janeiro, Brasil, 1988.
- ROBERTSON, D. I. TRANSYT – A Traffic Network Study Tool. TRRL, LR 253. Crowthorne, Reino Unido, 1969.
- SILVA, P. C. M. Contribuição Metodológica à Simulação do Tráfego Urbano: uma adaptação do modelo TRANSYT/8. Tese de Mestrado da COPPE/UFRJ. Rio de Janeiro, Brasil, 1992.
- SILVA, P. C. M. Modelling Interactions Between Bus Operations and Traffic Flows. Tese de Doutorado da University College London. Londres, Reino Unido, 2001.